Theoretische Physik C **(Abgabe bis 4. Dezember 2020, 23:59)**

Hausübung 7

Prof. Dr. Olaf Lechtenfeld, Daniel Westerfeld

Aufgabe 1: Lokalisiertes freies Teilchen

(2+2+1=5 Punkte)

Ein freies Teilchen sei für $t = 0$ lokalisiert (die Wellenfunktion, nicht die Wahrscheinlichkeitsdichte!):

$$|\psi(0)\rangle = |x_0\rangle \quad \Leftrightarrow \quad \langle x|\psi(0)\rangle = \langle x|x_0\rangle = \delta(x - x_0)\,.$$

[HÜ 1.1] Berechnen Sie die Impulswellenfunktion $\langle p|\psi(t)\rangle$.

[HÜ 1.2] Berechnen Sie nun $\psi(x,t)$, indem Sie

$$\psi(x,t) = \langle x|\psi(t)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}p\, \langle x|p\rangle\langle p|\psi(t)\rangle$$

nutzen.

Hinweis: Im Exponenten quadratisch ergänzen! Es gilt $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}u\, \mathrm{e}^{-\beta u^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\beta}}$ *für* $\mathrm{Re}\,\beta \geq 0$.

[HÜ 1.3] Berechnen Sie die Zeitentwicklung auch mithilfe des Propagators in Ortsdarstellung. Für ein freies Teilchen lautet dieser:

$$\langle x|U(t)|y\rangle = \sqrt{\frac{m}{2\pi \mathrm{i}\hbar t}}\, \exp\left(\frac{\mathrm{i}\, m(x-y)^2}{2\hbar t}\right)\,.$$

Hinweis: $\psi(x,t) = \int \mathrm{d}y \langle x|U(t)|y\rangle\langle y|\psi(0)\rangle$.

Aufgabe 2: Quantendraht

(1+2.5+1.5=5 Punkte)

Ein Teilchen kann sich nur auf der x-Achse zwischen den Koordinaten $x = 0$ und $x = L$ bewegen. Die Wahrscheinlichkeit, es außerhalb dieses Intervalls anzutreffen, ist also null.

[HÜ 2.1] Welche Randbedingungen bedeutet dies für die Wellenfunktion in Ortsdarstellung? Zeigen Sie, dass P^2 auf solchen Wellenfunktionen hermitesch ist.

Hinweis: Die Ortswellenfunktion muss überall stetig sein.

[HÜ 2.2] Bestimmen Sie für den Hamilton-Operator $H = \frac{P^2}{2m}$ die Eigenwerte E_n und die normierten Eigenzustände $|n\rangle$ in der Ortsdarstellung. Skizzieren Sie die Wahrscheinlichkeitsdichte $w_n(x) = |\langle x|n\rangle|^2$ eines Teilchens der Energie E_n.

[HÜ 2.3] Berechnen Sie für den Zustand $|n\rangle$ die Erwartungswerte $\langle X\rangle$ und $\langle X^2\rangle$ sowie $\langle P\rangle$ und $\langle P^2\rangle$. Überprüfen Sie die Unschärferelation $\Delta P \Delta X \geq \hbar/2$.